

Испит из Математике , Хемија, 18.06.2014. ГРУПА 1

- 1.(8 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n^2+n}$.
- 2.(8 поена) Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $f(x) = \arctg \frac{x-1}{x+1}$.
- 3.(8 поена) Израчунати интеграл $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$.
- 4.(8 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 4y' + 3y = e^{3x} + x^2$.
- 5.(8 поена) Вероватноћа да ће такмичар А освојити медаљу за тим је 0.6 а за такмичара Б је 0.8.
(а) Наћи врероватноћу да ће бар једна медаља бити освојена ако се такмичари боре независно.
(б) Ако је медаља освојена, која је вероватноћа да ју је освојио такмичар А?
- 6.(10 поена) Написати формулу за извод инверзне функције и помоћу ње израчунати извод функције $y = \ln x$.
- 7.(10 поена) Извести формулу за опште решење диференцијалне једначине $y' + P(x)y = Q(x)$.
Илустровати формулу на једном примеру.

Испит из Математике , Хемија, 18.06.2014. ГРУПА 2

- 1.(8 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n^2+n}$.
- 2.(8 поена) Испитати монотоност и наћи екстреме функције $f(x) = \arctg \frac{x^2+1}{x^2-1}$.
- 3.(8 поена) Израчунати интеграл $\int \frac{x+1}{x^2+x-6} dx$.
- 4.(8 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + 4y' = x^2 + \sin 2x$.
- 5.(8 поена) Вероватноћа да ће студент А решити неки задатак је 0.7 а за студента Б је 0.9.
(а) Наћи врероватноћу да ће задатак решити бар један студент ако га решавају независно.
(б) Ако је задатак решен, која је вероватноћа да га је решио студент Б?
- 6.(10 поена) Написати формулу за извод инверзне функције и помоћу ње израчунати извод функције $y = \ln x$.
- 7.(10 поена) Извести формулу за опште решење диференцијалне једначине $y' + P(x)y = Q(x)$.
Илустровати формулу на једном примеру.

Решење:

1. задатак:

група 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{3n+1}{3}}\right)^{-\frac{3n+1}{3} \cdot \frac{-3(n+1)}{3n+1}} =$
 $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n-3}{3n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ па ред по Кошијевом критеријуму конвергира.

група 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2(n+1)}{2n+1}} =$
 $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1}} = e^1 = e > 1$ па ред по Кошијевом критеријуму дивергира.

2. задатак

Група 1: $f(x) = \arctg \frac{x-1}{x+1}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{1}{x^2+1}, f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Функција је конвексна на интервалу $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, а конкавна на интервалу $(0, \infty)$. Превојна тачка $(0, -\pi/4)$.

Група 2: $f(x) = \arctg \frac{x^2+1}{x^2-1},$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, f'(x) = \frac{-2x}{x^4+1}.$$

Функција опада на интервалу $(0, 1) \cup (1, \infty)$, а расте за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Локални максимум је у тачки $(0, -\pi/4)$.

3. задатак: У питању је интеграл рационалне функције. Расставимо именилац на чиниоце и поделимо дати интеграл на два интеграла. После налажења непознатих константи A и B добија се

$$\text{група 1: } \int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx = \int \frac{A}{x-2} + \int \frac{B}{2x+1} = \frac{2}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{10} \ln|2x+1| + C.$$

$$\text{група 2: } \int \frac{x+1}{x^2+x-6} dx = \int \frac{A}{x-2} + \int \frac{B}{x+3} = \frac{3}{5} \ln|x-2| + \frac{2}{5} \ln|x+3| + C.$$

4. задатак:

група 1: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}, f(x) = f_1(x) + f_2(x), f_1(x) = e^{3x}, f_2(x) = x^2$

Одређујемо партикуларна решења y_{p1} и y_{p2} једначина $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ и $y'' - 4y' + 3y = x^2$ где су $y_{p1} = A x e^{3x}$ и $y_{p2} = B x^2 + C x + D$. Добија се $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{8}{9}$ и $\frac{26}{27}$ тј $y_{p1} = \frac{1}{2} x e^{3x}$ и $y_{p2} = \frac{1}{3} x^2 + \frac{8}{9} x + \frac{26}{27}$. Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} x e^{3x} + \frac{1}{3} x^2 + \frac{8}{9} x + \frac{26}{27}$

група 2: $y_h = C_1 + C_2 e^{-4x}, f(x) = f_1(x) + f_2(x), f_1(x) = x^2, f_2(x) = \sin 2x$

Одређујемо партикуларна решења y_{p1} и y_{p2} једначина $y'' + 4y' = x^2$ и $y'' + 4y' = \sin 2x$ где су $y_{p1} = x(Ax^2 + Bx + C)$ и $y_{p2} = D \cos 2x + E \sin 2x$. Добија се $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{16}, C = \frac{1}{32}, D = -\frac{1}{10}$ и $E = -\frac{1}{16}$ тј. $y_{p1} = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{32} x$ и $y_{p2} = -\frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x$. Опште решење диференцијалне једначине је $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{32} x - \frac{1}{10} \cos 2x - \frac{1}{20} \sin 2x$

5. задатак

група 1:

D_1 -такмичар А је освојио медаљу,

D_2 -такмичар Б је освојио медаљу,

D_3 -освојена бар једна медаља,

$$(a): P(D_3) = P(D_1 \overline{D_2}) + P(\overline{D_1} D_2) + (D_1 D_2) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.92.$$

$$\text{Или: } P(D_3) = 1 - P(\overline{D_1} \overline{D_2}) = 1 - 0.4 \cdot 0.2 = 0.92.$$

(б): Применом Бајесове формуле добија се

$$P(H_1|D) = \frac{P(H_1 D)}{P(D)} = \frac{P(H_1) P(D|H_1)}{P(H_1) P(D|H_1) + P(H_2) P(D|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.6}{\frac{1}{2} \cdot 0.6 + \frac{1}{2} \cdot 0.8} = 0.428.$$

група 2:

D_1 -студент А је решио задатак,

D_2 -студент Б је решио задатак,

D_3 -задатак је решен,

(а): $P(D_3) = P(D_1 \overline{D_2}) + P(\overline{D_1} D_2) + (D_1 D_2) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.9 = 0.97.$

Или: $P(D_3) = 1 - P(\overline{D_1} \overline{D_2}) = 1 - 0.3 \cdot 0.1 = 0.97.$

(б): Применом Бајесове формуле добија се

$$P(H_2|D) = \frac{P(H_2 D)}{P(D)} = \frac{P(H_2)P(D|H_2)}{P(H_1)P(D|H_1)+P(H_2)P(D|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.9}{\frac{1}{2} \cdot 0.7 + \frac{1}{2} \cdot 0.9} = 0.562.$$